15. Численные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Постановка задачи. Методы отделения корней.

# РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

## Постановка задачи и этапы решения.

При решении алгебраических и трансцендентных уравнений, встречающихся на практике, очень редко удается найти точное решение. Поэтому приходится применять различные приближенные способы определения корней. В общей постановке задачи обычно требуют непрерывность функции f(x), корни которой ищутся с заданной точностью.

### Пример отделения корней.

Приведем лишь один ПРИМЕР: определить количество и приближенное расположение корней уравнения sinX - 0.2X=0.

Для решения перепишем уравнение в виде sinX=0.2X. Поскольку значения функции y=sinX лежат между -1 и 1, то корни уравнения могут быть только на отрезке [-5,5]. Ясно, что один из корней - это X=0 . Если же на отрезке [-5,5] нарисовать графики функций y1(X)= sinX и y2(X)=0.2X, то сразу будет видно, что точки их пересечения (а это и есть корни нашего уравнения) расположены на отрезках [-3,-2] и [2,3].

Ответ: исходное уравнение имеет 3 корня: Х1=0, Х2∈[-3,-2] и Х3∈[2,3].

В дальнейшем мы будем считать, что уравнение f(X)=0 задано на отрезке [a,b], на котором расположен ровно один его корень, и исследовать решение второй части задачи - уточнение корней. По-видимому, эта задача является самой простой из всех вычислительных задач, встречающихся на практике. Существуют несколько хороших методов решения данной задачи.

## Метод половинного деления

хорошо знаком по доказательству теоремы о промежуточном значении в курсе математического анализа. Его суть заключается в построении последовательности вложенных отрезков, содержащих корень. При этом на каждом шаге очередной отрезок делится пополам и в качестве следующего отрезка берется та половина, на которой значения функции в концах имеют разные знаки. Процесс продолжают до тех пор, пока длина очередного отрезка не станет меньше, чем величина 2ε. Тогда его середина и будет приближенным значением корня с точностью ε.

Алгоритм данного метода можно записать так:

1.Ввести данные (a, b, ε).

2.Если нужная точность достигнута (| b - a | < 2ε) то иди к п.6

3.Возьми середину очередного отрезка ( С = ( a + b )/ 2 ).

4.Если значения функции в точках а и С одного знака (f(a)\*f(C)>0), то в качестве следующего отрезка возьми правую половину (а=С), иначе левую (b=C).

5.Иди к п.2.

6.Напечатать ответ (( a + b ) / 2 )

## Метод хорд и касательных

(или **метод Ньютона)** применяется только в том случае, когда . f'(X) и f''(X) не изменяют знака на отрезке [a,b], т.е.функция f(X) на отрезке [a,b] монотонна и не имеет точек перегиба.

Суть метода та же самая - построение последовательности вложенных отрезков, содержащих корень, однако отрезки строятся по-другому. На каждом шаге через концы дуги графика функции f(X) на очередном отрезке проводят хорду и из одного конца проводят касательную. Точки пересечения этих прямых с осью ОХ и образуют следующий отрезок. Процесс построения прекращают при выполнении того же условия (| b - a | < 2ε).

Для того, чтобы отрезки получались вложенными, нужно проводить ту касательную из конца, которая пересекает ось ОХ на отрезке [a,b]. Перебрав четыре возможных случая, легко увидеть, что касательную следует проводить из того конца, где знак функции совпадает со знаком второй производной. Также несложно заметить, что касательная проводится либо все время из правого, либо все время из левого конца. Будем считать для определенности , что этот конец - b .

Формулы, употребляемые в методе Ньютона, хорошо известны из аналитической геометрии:

Уравнение хорды, проходящей через точки (a,f(a)) и (b,f(b)): y = f(a)+(x-a)\*(f(b)-f(a))/(b-a),

откуда точка пересечения с осью ОХ: Х= a - f(a) \*(b-a)/(f(b)-f(a)).

Уравнение касательной, проходящей через точку (b,f(b)): -y=f(b)+f'(b)(x-b),

откуда точка пересечения с осью ОХ: Х= b - f(b)/f'(b).

При составлении алгоритма снова естественно использовать для концов отрезка только две переменные a и b и писать: a= a - f(a) \*(b-a)/(f(b)-f(a)) и (1.1)

b= b - f(b)/f'(b) (1.2)

Однако, в этом случае важен порядок формул (1.1) и (1.2).

## Метод итераций

применяется к уравнению вида Х= u(x) на отрезке [a,b], где:

а) модуль производной функции u(x) невелик: | u'(x) | <= q < 1 (x∈[a,b] )

б) значения u(x) лежат на [a,b] ,т.е. a <= u(x) <= b при x∈[a,b].

Если заранее известно, что на отрезке [a,b] расположен ровно один корень уравнения Х=u(x), то достаточно проверить выполнение условия а).

Упражнения: определить, применим ли метод итераций для уравнений:

1.7 Х=ln(3X+2) на отрезке [0,5]. А на отрезке [1,5]?

* 1. Х=е х-9 на отрезке [10,12]. А на отрезке [0,1]?

### Сведение исходного уравнения к виду, пригодному для применения метода итераций.

Сведение уравнения f(x)=0 к нужному виду обычно осуществляют одним из двух способов:

1. Выражают один из Х, входящих в уравнение, например уравнение ех - х-=0 приводят к виду:

Х=ех или Х = ln(х)

2) Подбирают множитель и производят преобразования: f(х)=0 => k\*f(x)=0 => х=х + k\*f(x), т.е. u(x)=х+ k\*f(x). Например, если 0 < m < f'(x) <= M при Х∈[a,b], то можно в качестве k взять величину - 1/М, и тогда 0 <= u'(x) = 1 +к\* f'(x)= 1- 1/M \* f' (x) <= 1- m/M

### Суть и обоснование метода итераций.

Суть метода итераций заключается в построении рекуррентной последовательности чисел, сходящейся к решению, по формуле хк+1 = u(xк), к=0,1,2,..., где х0∈[a,b] -произвольная точка.

Справедливость метода обосновывает следующая ТЕОРЕМА:

Пусть на [a,b] задана функция u(x), удовлетворяющая условиям а) и б), а х0 - произвольная точка отрезка [a,b], причем уравнение x=u(x) имеет корень. Тогда последовательность {Xк}, построенная по формуле хк+1 = u(xк) сходится к решению не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем q.

Доказательство: Сравним расстояния от точек хк+1 и xк до решения (обозначим его С), используя теорему Лагранжа:

| хк+1-С| = |u(xк)- u(C)| = | (хк-с) u'(у)|<= |(хк-с)|\* max | u'(x) | = q |(хк-с)|,

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Требование существования корня приведено в теореме лишь для простоты доказательства.

Замечание 2. Теорема является одним из частных случаев применения принципа сжимающих отображений, который часто применяется в самых разных вопросах многих точных наук.

### Условие окончания вычислений в методе итераций.

Замечание 3. Процесс построения последовательности следует обрывать, когда станет верным неравенство |хк+1-хк|< ε\*(1-q)/q. В этом случае хк+1 и дает приближение к решению с требуемой точностью.

**16. Итерационные Методы уточнения корней**

### **1.1. Отделение корней**

В общем случае отделение корней уравнения f(x)=0 базируется на известной теореме, утверждающей, что если непрерывная функция f(x) на концах отрезка [a,b] имеет значения разных знаков, т.е. f(a)ґ f(b)Ј 0, то в указан-ном промежутке содержится хотя бы один корень. Например, для уравнения f(x)= x3-6x+2=0 видим, что при x®Ґ   f(x)>0, при x®-Ґ   f(x)<0, что уже свидетельствует о наличии хотя бы одного корня.

В общем случае выбирают некоторый диапазон, где могут обнаружиться корни, и осуществляют "прогулку" по этому диапазону с выбранным шагом h для обнаружения перемены знаков f(x), т.е. f(x)ґ f(x+h)<0.

При последующем уточнении корня на обнаруженном интервале не надейтесь никогда найти точное значение и добиться обращения функции в нуль при использовании калькулятора или компьютера, где сами числа представлены ограниченным числом знаков. Здесь критерием может служить приемлемая абсолютная или относительная погрешность корня. Если корень близок к нулю, то лишь относительная погрешность даст необходимое число значащих цифр. Если же он весьма велик по абсолютной величине, то критерий абсолютной погрешности часто дает совершенно излишние верные цифры. Для функций, быстро изменяющихся в окрестности корня, может быть привлечен и критерий: абсолютная величина значения функции не превышает заданной допустимой погрешности.

### **1.2. Уточнение корней методом половинного деления (дихотомии)**

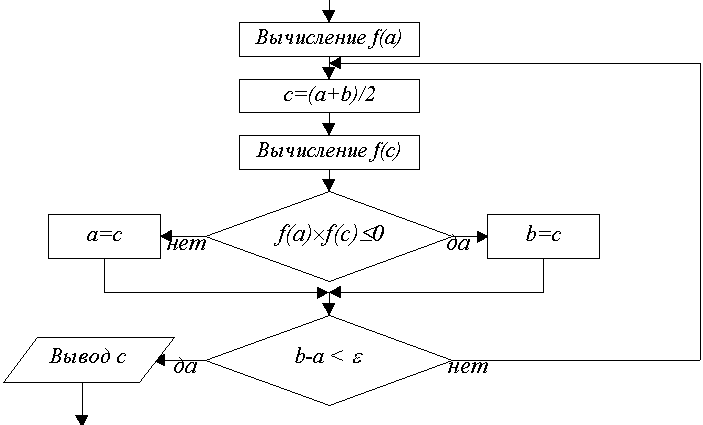
### Метод деления отрезка пополам

|  |
| --- |
|  |
|  |

Самым простейшим из методов уточнения корней является метод половинного деления, или метод дихотомии, предназначенный для нахождения корней уравнений, представленных в виде f(x)=0.

Пусть непрерывная функция f(x) на концах отрезка [a,b] имеет значения разных знаков, т.е. f(a)ґ f(b) Ј 0([рис. 1](http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/gl1.asp#m)), тогда на отрезке имеется хотя бы один корень.

Возьмем середину отрезка с=(a+b)/2. Если f(a)ґ f(c) Ј 0, то корень явно принадлежит отрезку от a до (a+b)/2 и в противном случае от (a+b)/2 до b.



*Рис. 2. Блок-схема метода половинного деления*

Поэтому берем подходящий из этих отрезков, вычисляем значение функции в его середине и т.д. до тех пор, пока длина очередного отрезка не окажется меньше заданной предельной абсолютной погрешности *(b-a)<e*.

Так как каждое очередное вычисление середины отрезка *c* и значения функции *f(c)* сужает интервал поиска вдвое, то при исходном отрезке [a,b] и предельной погрешности *e* количество вычислений *n* определяется условием *(b-a)/2n<e*, или *n~log2((b-a)/e )*. Например, при исходном единичном интервале и точности порядка *6* знаков (*e ~ 10-6*) после десятичной точки достаточно провести *20* вычислений (итераций) значений функции.

С точки зрения машинной реализации (рис. 2) этот метод наиболее прост и используется во многих стандартных программных средствах, хотя существуют и другие более эффективные по затратам времени методы.

### **1.3. Уточнение корней методом хорд**

В отличие от метода дихотомии, обращающего внимание лишь на знаки значений функции, но не на сами значения, метод хорд использует пропорциональное деление интервала ([рис. 3](http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/gl1.asp#m2)).

|  |
| --- |
| Метод хорд |
| Рис. 3. Метод хорд |

Здесь вычисляются значения функции на концах отрезка, и строится "хорда", соединяющая точки (a,f(a)) и (b,f(b)). Точка пересечения ее с осью абсцисс

http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/img/gl1-005.gif

принимается за очередное приближение к корню. Анализируя знак f(z) в сопоставлении со знаком f(x) на концах отрезка, сужаем интервал до [a,z] или [z,b] и продолжаем процесс построения хорд до тех пор, пока разница между очередными приближениями не окажется достаточно малой (в пределах допустимой погрешности) |Zn-Zn-1|<e .

Можно доказать, что истинная погрешность найденного приближения:

http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/img/gl1-006.gif,

где X\* - корень уравнения, Zn и Zn+1 - очередные приближения, m и M - наименьшее и наибольшее значения f(x) на интервале [a,b].

### **1.4. Уточнение корней методом касательных (Ньютона)**

Обширную группу методов уточнения корня представляют итерационные методы - методы последовательных приближений. Здесь в отличие от метода дихотомии задается не начальный интервал местонахождения корня, а его начальное приближение.

Наиболее популярным из итерационных методов является метод Ньютона (метод касательных).

|  |
| --- |
| Метод касательных |
| Рис. 4. Метод касательных |

Пусть известно некоторое приближенное значение Zn корня X\*. Применяя формулу Тейлора и ограничиваясь в ней двумя членами, имеем

http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/img/gl1-008.gif,

откуда

http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/img/gl1-009.gif.

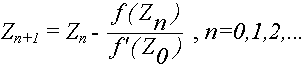
Геометрически этот метод предлагает построить касательную к кривой y=f(x) в выбранной точке x=Zn, найти точку пересечения её с осью абсцисс и принять эту точку за очередное приближение к корню (рис. 4).

|  |  |
| --- | --- |
| Расходящийся процесс | Приближение к другому корню |
| Рис. 5. Расходящийся процесс | Рис. 6. Приближение к другому корню |

Очевидно, что этот метод обеспечивает сходящийся процесс приближений лишь при выполнении некоторых условий (например при непрерывности и знакопостоянстве первой и второй производной функции в окрестности корня) и при их нарушении либо дает расходящийся процесс (рис. 5), либо приводит к другому корню (рис. 6).

Очевидно, что для функций, производная от которых в окрестности корня близка к нулю, использовать метод Ньютона едва ли разумно.

Если производная функции мало изменяется в окрестности корня, то можно использовать видоизменение метода

.

Существуют и другие модификации метода Ньютона.

### **1.5. Уточнение корней методом простой итерации**

Другим представителем итерационных методов является метод простой итерации.

Здесь уравнение f(x)=0 заменяется равносильным уравнением x=j (x) и строится последовательность значений

http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/img/gl1-013.gif.

Если функция j (x) определена и дифференцируема на некотором интервале, причем |j /(x)|< 1, то эта последовательность сходится к корню уравнения x=j (x) на этом интервале.

Геометрическая интерпретация процесса представлена на рис. 7. Здесь первые два рисунка (а, б) демонстрируют одностороннее и двустороннее приближение к корню, третий же (в) выступает иллюстрацией расходящегося процесса (|j /(x)| > 1).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а | б | в |
| http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/img/gl1-014.gif | http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/img/gl1-015.gif |  |
| http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/img/gl1-016.gif  Рис. 7. Геометрическая интерпретация метода простой итерации | | |

Если f '(x)>0, то подбор равносильного уравнения можно свести к замене x=x-l Ч f(x), т.е. к выбору j (x)= x-l Ч f(x), где l >0 подбирается так, чтобы в окрестности корня 0 < j '(x)=1- l Ч f '(x) Ј 1. Отсюда может быть построен итерационный процесс

http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/img/gl1-017.gif.

где M і max |f '(x)| (в случае f '(x)< 0 возьмите функцию f(x) с противоположным знаком).

Возьмем для примера уравнение x3 + x -1000 = 0. Очевидно, что корень данного уравнения несколько меньше 10. Если переписать это уравнение в виде x =1000 - x3 и начать итерационный процесс при x0=10, то из первых же приближений очевидна его расходимость. Если же учесть f '(x)=3x2+1>0 и принять за приближенное значение максимума f '(x) M=300, то можно построить сходящийся итерационный процесс на основе представления

http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/img/gl1-018.gif.

Можно и искусственно подобрать подходящую форму уравнения, например:

http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/img/gl1-019.gif или http://old.exponenta.ru/educat/systemat/pimonov/Equations/img/gl1-020.gif.

Заметим, что существуют и другие методы (наискорейшего спуска, Эйткена-Стеффенсена, Вегстейна, Рыбакова и т.д.) уточнения корней, обладающие высокой скоростью сходимости.